MATRIZENRECHNUNG

Übergangsmatrizen

Themenheft:

Populationsentwicklungen und zyklische Matrizen

Datei 62334

Stand: 11. November 2012

Friedrich Buckel

Demo für www.mathe-cd.de

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Eine spezielle Form von mehrstufigen Prozessen sind zyklische Prozesse, also Prozesse, die „irgendwann“ wieder den Ausgangszustand herstellen. Die bekannten Beispiele dazu sind Populationsentwicklungen.
Die Anfänge dieser Theorie ist für Schüler gut verständlich. Und dazu zeige ich hier einführende Beispiele und einige Übungsaufgaben.
Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass man die Grundlagen der Übergangsmatrizen schon beherrscht (also Text 62331).

Es gibt dazu weitere Texte 72501 (und bald noch 72502), die Abituraufgaben zu Übergangsmatrizen enthalten.

Die Grafiken wurden mit MatheGrafix (Version 10) erstellt und deren Dateien finden Sie auf der Mathe-CD im Ordner Mathegrafiken in mgt-62334 zur weiteren Verarbeitung.

Inhalt

Beispiel 1a	Entwicklung von Käfern aus Eiern über das Zwischenstadium Larven Hier: Stabiler, reproduzierender Zyklus	3
Beispiel 1b	Hier kein stabiler Zyklus sondern exponentielles Wachstum	6
Beispiel 1c	Hier kein stabiler Zyklus sondern exponentielle Abnahme	8
Beispiel 2	Maikäfer haben einen vierjährigen Zyklus	9
Beispiel 3	Viehzucht	12
Beispiel 4	Reproduzierender Bestand innerhalb von 1 Zyklus	14
Beispiel 5	Viehzucht mit 4 Altersgruppen	18
Beispiel 6	Populationsmodell mit 3 gleich langen Phasen	19
Übungsaufgaben		20
Lösungen		22 - 31

Demo für www.mathe-cd.de

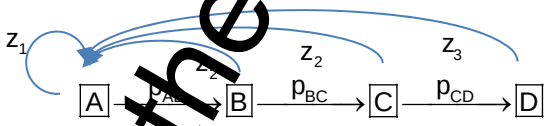
Populationsentwicklung und Leslie-Matrizen

Für die Analyse von Populationsentwicklungen gibt es mathematische Modelle, mit denen man aus Anfangsbeständen Folgebestände berechnen kann. Die zugehörigen Übergangsmatrizen.

Liegt ein Zyklus von 4 Altersgruppen (Zuständen) vor, dann kann man die einfachste Form solcher Übergänge (Entwicklungen durch eine Tabelle dieser Form beschreiben:

	A	B	C	D
A	z_1	z_2	z_3	z_4
B	p_{AB}	0	0	0
C	0	p_{BC}	0	0
D	0	0	p_{CD}	0

Dazu gehört dieses Übergangsdiagramm:



Die Übergangsmatrix heißt auch **Leslie-Matrix:**

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p_{AB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{BC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{CD} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahl p_{AC} gibt den Bruchteil der Elemente im Zustand A an, die den Zustand B erreichen usw.

Daher sind die drei Zahlen p_{AB}, p_{BC} und p_{CD} Brüche aus dem Intervall $]0;1]$.

Die Zahlen z_i der 1. Reihe sind die Vermehrungsraten des Anfangszustandes A (fertility rates).

Wir beginnen unsere Beispiele mit den einfachsten Modellen der Form

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ p_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & p_{BC} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & z \\ p_{AB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{BC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{CD} & 0 \end{pmatrix}$$

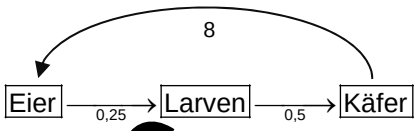
In denen nur der letzte Alterszustand einen Beitrag zu A liefert.

Demo für www.mathe-cd.de

Beispiel 1a

Entwicklung von Käfern aus Eiern über das Zwischenstadium Larven

In einem Modell wird angenommen, dass aus 25% der Eier Larven schlüpfen, und dass innerhalb eines Monats davon die Hälfte das Käferstadium erreicht. Jeder Käfer legt dann durchschnittlich 8 Eier.



Diesen Entwicklungsprozess kann man durch eine Übergangstabelle darstellen:

	E	L	K
E	0	0	8
L	$\frac{1}{4}$	0	0
K	0	$\frac{1}{2}$	0

Oder als Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Für die **zahlenmäßige Erfassung einer solchen Entwicklung** legt man eine Anfangsverteilung fest. Diesen Anfangszustand schreibt man meist als Zustandsvektor (Verteilungsvektor). Er hat bei diesem Zyklus drei Komponenten: Die erste gibt die Anzahl der vorhandenen Eier an, die zweite die Zahl der geschlüpften Larven und die dritte die Anzahl der schließlich herangewachsenen Käfer.

<u>Beispiel für einen Startvektor</u>: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$ (also 40 Eier, 20 Larven und 12 Käfer)

1. Rekursive Berechnung der Folgezustände:

$$\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{v}_0 \quad !!!$$

$$\vec{v}_4 = U \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \quad !!!$$

Beobachtung: Nach 3 Zyklen (hier sind es laut Aufgabe Monate) wiederholt sich der Bestand: $\vec{v}_3 = \vec{v}_0$, und $\vec{v}_4 = \vec{v}_1$ usw.

Der Grund liegt in der typischen Form der Übergangsmatrix bei Populationsentwicklungen:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen sich dieser „stabile“ Zyklus einstellt.

Demo für www.mathe-cd.de

2. Explizite Berechnung der Folgezustände mittels Matrixpotenzen:

Die Übergangsmatrix hat, wenn man die Reihenfolge der Entwicklungsstaden einhält, diese Form:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist p_{12} der Anteil (die Wahrscheinlichkeit) der Übergänge aus dem 1. Zustand (Eier) in den zweiten (Larven), p_{23} der Anteil der Übergänge aus dem 2. Zustand (Larven) in den dritten (Käfer). z ist die Vermehrungsrate (Anzahl von einem Käfer der gelegten Eier).

Berechnung des ersten Folge-Zustandsvektors:

$$\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0$$

Berechnung des ersten zweiten-Zustandsvektors:

$$\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = U \cdot (U \cdot \vec{v}_0) = U^2 \cdot \vec{v}_0$$

wobei $\vec{v}_1$ durch $U \cdot \vec{v}_0$ ersetzt worden ist.

$$\text{mit } U^2 = U \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{23} \cdot r & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \cdot r \\ p_{12} \cdot p_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_{23} \cdot r & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \cdot r \\ p_{12} \cdot p_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0$$

Berechnung des dritten Folge-Zustandsvektors:

$$\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = U \cdot (U^2 \cdot \vec{v}_0) = U^3 \cdot \vec{v}_0$$

$$\text{mit } U^3 = U^2 \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & p_{23} \cdot r & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \cdot r \\ p_{12} \cdot p_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \cdot p_{23} \cdot r & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} \cdot p_{23} \cdot r & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \cdot p_{23} \cdot r \end{pmatrix}$$

Ersetzt man $k = p_{12} \cdot p_{23} \cdot r$, dann gilt hier:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = k \cdot E \cdot \vec{v}_0 = k \cdot \vec{v}_0$$

weil die Einheitsmatrix E das neutrale Element für die Matrizenmultiplikation ist.

Demo für www.mathe-cd.de

Auswertung:

Ist $k = p_{12} \cdot p_{23} \cdot r = 1$, dann gilt $\vec{v}_3 = \vec{v}_0$. In diesem Fall liegt ein **stabiler Zyklus** vor.

Nach jeweils 3 Perioden liegt der ursprüngliche Zustand wieder vor.

In unserem Beispiel ist genau das der Fall: $k = p_{12} \cdot p_{23} \cdot r = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 1$.

Daher war $\vec{v}_3 = \vec{v}_0$, und allgemein ist dann $\vec{v}_{n+3} = \vec{v}_n$

Ist $k > 1$, etwa k = 1,25, dann gilt: $\vec{v}_3 = 1{,}25 \cdot \vec{v}_0$. D. h. nach jeweils 3 Zyklen hat sich der Bestand mit dem Faktor 1,25 vermehrt, d.h. er wurde um 25% größer.

Dies ist ein **exponentielles Wachstum**. Nimmt man über 3 Jahre einen Mittelwert, dann kommt man zu einem Jahresfaktor von $k^* = \sqrt[3]{1{,}25} \approx 1{,}077$

Ist $0 < k < 1$, etwa k = 0,5, dann gilt: $\vec{v}_3 = 0{,}5 \cdot \vec{v}_0$. Nach jeweils 3 Zyklen hat sich der dann Bestand mit dem Faktor 0,5 verkleinert, d.h. er wurde um 50 % kleiner.

Dies ist eine **exponentielle Abnahme**. Nimmt man über 3 Jahre einen Mittelwert, dann kommt man zu einem Jahresfaktor von $k^* = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}794$.

Von besonderem Interesse sind für schulische Aufgaben die stabilen Zyklen, also die Entwicklungen, bei denen sich also nach n Perioden wieder der Ausgangszustand einstellt.

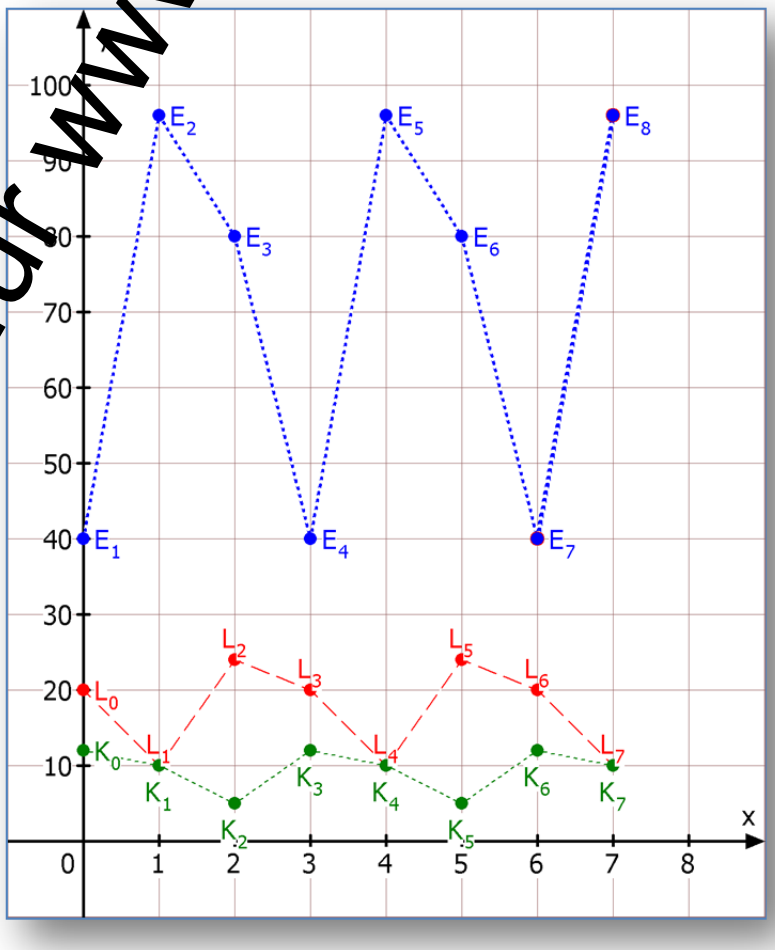
Definition: Eine quadratische Matrix A, bei der eine Potenz $A^n = E$ ist, heißt zyklische Matrix.

Zyklische Übergangsmatrizen erzeugen stabile zyklische Zustandsentwicklungen: Nach n Übergängen liegt wieder der Ausgangszustand vor.

Beim Käfermodell im Beispiel 1 handelte es sich um einen 3-monatigen Zyklus

Nebenstehendes Diagramm zeigt die Fakten graphisch.

Die Anzahlen der Eier, der Larven und der Käfer zeigen eine Periode von Monaten.



Demo für www.mathe-cd.de

Beispiel 1b

Entwicklung von Käfern aus Eiern über das Zwischenstadium Larven

Fortsetzung auf der Mathe-CD

Demo für www.mathe-cd.de